Научно-исследовательская работа

Тема работы

«Одно уравнение и множество его решений»

***Выполнила**:*

Карпухина Татьяна Андреевна

учащаяся 8 «А» класса

Муниципального бюджетного

общеобразовательного учреждения

«Лицей № 9 имени К.Э. Циолковского»

города Калуги

***Руководитель**:*

Рылова Ирина Георгиевна

учитель математики

Муниципального бюджетного

общеобразовательного учреждения

«Лицей № 9 имени К.Э. Циолковского»

города Калуги

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения в курсе алгебры занимают ведущее место. Уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее число задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. Целые уравнения также описывают различные процессы, протекающие в реальном мире. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники. Появилась гипотеза: существует способы решения уравнений, которые расширят множество способов, изучаемых в школьной программе.

Объект исследования - алгебра, предмет исследования – методы решения уравнений, в том числе и целых третьей степени.

Цель: убедить в том, что существуют способы решения уравнений, позволяющие упрощать решение уравнений.

Задачи:

1. Применять графический метод при решении уравнения.
2. Убедить в том, что знание свойств функций, например монотонность, позволяют решать уравнения.
3. Применять при решении уравнений метод неопределенных коэффициентов.
4. Использовать теорему Виета при решении уравнения третьей степени.
5. Применять свойство целого уравнения с целыми корнями.
6. Решить одно уравнение несколькими способами и сравнить эти способы.
7. Распространить приобретенный опыт в решении уравнений среди учащихся среднего и старшего звена лицея.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение. Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая часть которого – целые выражения.

Целое уравнение *n*-ой степени приводится к виду $ax^n + bx^{n-1} + ... + px + q = 0$, где x - переменная, $a, b, ,..., p, q$ - некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Уравнение *n*-ой степени имеет не более *n* корней. Если уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то его можно найти, используя следующую теорему.

Теорема. Если уравнение $ax^n + bx^{n-1} + ... + px + q = 0$, в котором все коэффициенты – целые числа, причем свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.

Целое уравнение третьей или более высокой степени в отдельных случаях удается решить, используя специальные приёмы.

Один из приемов решения уравнения вида *P(x)*=0, где *P(x)* – многочлен, степень которого выше двух, состоит в разложении многочлена на множители. С помощью разложения многочлена на множители удается иногда решение уравнения *n*-ой, где *n* не меньше 3, свести к решению уравнений более низких степеней.

Пример 1. Решить уравнение $4x^3 - 11x + 3 = 0.$

Решение. Разложим многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители.

$$\begin{aligned}
&4x^3 - 9x - 2x + 3 = 0,\\
&(4x^3 - 9x) - (2x - 3) = 0,\\
&x(2x - 3)(2x + 3) - (2x - 3) = 0,\\
&(2x - 3)(2x^2 + 3x - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Из условия равенства нулю произведения вытекает, что полученное равенство верно, когда или первый или второй множители равны нулю.

$$\left[\begin{aligned}&(2x - 3) = 0,\\ &(2x^2 + 3x - 1) = 0.\end{aligned}\right. \left[\begin{aligned}&x = 1{,}5,\\ &x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.\end{aligned}\right. [1]$$

Теорема Виета для уравнения 3 степени также может служить для решения уравнений-многочленов: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, x_1, x_2, x_3 -$ корни данного уравнения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, [2] \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Пусть дано уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, x_1, x_2, x_3 -$ корни данного уравнения. Тогда левую часть уравнения можно разложить на множители:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Big| : a$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2)(x - x_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

Но два многочлена тождественно равны в том и только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны (метод неопределенных коэффициентов). Отсюда следует, что выполняется равенство:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Пример 2. Напишите кубическое уравнение, корни которого являются квадратами корней уравнения $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0.$

Решение. Обозначим корни заданного уравнения через x_1, x_2, x_3. Тогда используем теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7, \\ x_1x_2x_3 = -5. \end{cases}$$

Корни искомого уравнения обозначим буквами y_1, y_2, y_3, а его коэффициенты — буквами b_1, b_2, b_3, положив коэффициент при y_3 равным 1. По условию должны выполняться равенства $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2, y_3 = x_3^2$ и поэтому

$$b_1 = -(y_1 + y_2 + y_3) = -\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$
$$b_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3,$$
$$b_3 = -y_1y_2y_3 = -x_1^2x_2^2x_3^2.$$

Но имеем

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9 - 2\cdot 7 = -5б$$
$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 49 - 2\cdot 3\cdot(-5) = 79б$$
$$x_1^2x_2^2x_3^2 = (x_1x_2x_3)^2 = (-5)^2 = 25.$$

Значит, $b_1 = 5, b_2 = 79, b_3 = -25$, и потому искомое уравнение имеет вид

$$y^3 + 5y^2 + 79y - 25 = 0.$$

Ответ: $y^3 + 5y^2 + 79y - 25 = 0.$ [3]

Решение уравнений с помощью монотонности функций позволяет быстро и просто найти корень уравнения (либо доказать, что уравнение корней не имеет).

Использование возрастания и убывания функций при решении уравнений опирается на следующие теоремы.

1)Если на некотором промежутке функция $f(x)$ возрастает (или убывает), то уравнение $f(x) = a$ на этом промежутке имеет единственный корень либо не имеет корней (a — постоянная величина (число)).

2)Если на некотором промежутке функция $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает (либо наоборот), то уравнение $f(x)=g(x)$ на этом промежутке имеет единственный корень либо не имеет корней.

Доказав, что уравнение имеет на промежутке не более чем один корень, можно попытаться определить его подбором.

Если функция имеет несколько промежутков возрастания и убывания, каждый из них следует рассмотреть отдельно.

Сумма возрастающих функций — возрастающая функция. Сумма убывающих функций — убывающая функция.

Прибавление или вычитание постоянной величины не влияет на монотонность функции. Если к возрастающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим возрастающую функцию. Если к убывающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим убывающую функцию.

Таким образом, использование монотонности функций при решении уравнений схематически можно изобразить так:

если

$$\left.\begin{array}{l} \nearrow = - \\ \searrow = - \\ \nearrow = \searrow \\ \nearrow + \nearrow = - \\ \nearrow + \nearrow = \searrow \\ \nearrow \pm - = \searrow \\ \searrow + \searrow = \nearrow \\ \searrow + \searrow = - \\ \searrow \pm - = \nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ,$$

то уравнение имеет единственный корень или не имеет корней. Разумеется, количество слагаемых может быть больше двух.

Пример 2. Решить уравнение $2x^{15}+3x=\frac{5}{x}$.

Решение. ОДЗ: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

На промежутке $(-\infty;0)$ функция $y=2x^{15}+3x$ возрастает, функция $y=\frac{5}{x}$ - убывает, следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x=-1$.

Аналогично, на промежутке $(0;+\infty)$ $y=2x^{15}+3x$ возрастает, $y=\frac{5}{x}$ - убывает, следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x=1$.

Ответ: $x=\pm 1$.

Нередко решить целое уравнение можно используя теорию многочленов.

Теорема: Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

с целыми коэффициентами. Тогда число p является делителем старшего коэффициента a_0.

Следствие: Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Следствие: Если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни, если они существуют – целые.

Пример 3. Решить уравнение в рациональных числах $2x^3-7x^2+5x-1=0$.

Решение. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения, тогда p является делителем числа 1: ± 1. q является делителем старшего члена: $\pm 1; \pm 2$.

Рациональные корни уравнения надо искать среди чисел: $\pm 1; \pm \frac{1}{2}$.

$$f(1) = 2 - 7 + 5 - 1 \neq 0,$$
$$f(-1) = -2 - 7 - 5 - 1 \neq 0,$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} - \frac{7}{4} + \frac{5}{2} - 1 = 0.$$

Корнем является число $\frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Если **у** многочлена с целыми коэффициентами рациональных корней не оказалось, можно попробовать разложить его на множители меньшей степени с целыми коэффициентами. Рассмотрим, например, уравнение $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0.$

Представим левую часть в виде произведения двух квадратных трехчленов с неизвестными (неопределенными) коэффициентами:

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q)$$

Раскроем скобки в правой части и приведем подобные:

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q) = x^4 + (a + p)x^3 + (b + ap + q)x^2 + (aq + bp)x + bq$$

Теперь, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях **x** в обеих частях, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + p = 0, \\ b + ap + q = -2, \\ aq + bp = -8 \\ bq = -3. \end{cases}$$

Попытка решить эту систему в общем виде вернула бы нас назад, к решению исходного уравнения. Но целые корни, если они существуют, нетрудно найти и подбором. Не ограничивая общности, можно считать, что $b \geq q$, тогда последнее уравнение показывает, что надо рассмотреть лишь два варианта: $\begin{cases} b = 3, q = 1, \\ b = 1, q = -3. \end{cases}$

Подставляя эти пары значений в остальные уравнения, убеждаемся, что первая из них дает искомое разложение: $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x - 1)$. Этот способ решения называется методом неопределенных коэффициентов.

ГЛАВА II. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

На примере одного уравнения третьей степени покажем всевозможные способы его решения и определим наиболее рациональный из них.

Пример. Решить уравнение $x^3 + 3x - 4 = 0.$

Решение.

1 способ. Графический способ решения.

Построим графики функций $y = x^3$ и $y = -3x + 4$ на одной системе координат (Рис. 1).

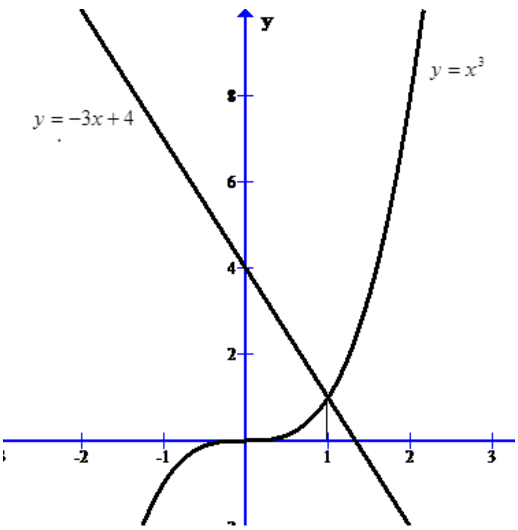

Рис. 1

2 способ. Применим свойство монотонных функций:

$\begin{cases} f(x) = x^3 \uparrow \\ g(x) = 3x - 4 \uparrow \end{cases} \Rightarrow (f(x) + g(x)) \uparrow$ и уравнение имеет не более одного корня. Найдём его подбором: $x = 1$.

Проверка подтверждает истинность нашего предположения.

Ответ: $x = 1$.

3 способ. Воспользуемся следствием: любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Делителями свободного члена являются целые числа $\pm 1; \pm 2; \pm 4$, корнем уравнения является

$x = 1$.

Разложим трехчлен $x^3 + 3x - 4$ на множители, пользуясь делением «уголком»:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x - 4 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 + x + 4 \\
x^2 + 3x & \\
-\ \underline{x^2 - x} & \\
4x - 4 & \\
-\ \underline{4x - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

Получаем $x^3 + 3x - 4 = (x^2 + x + 4)(x - 1)$.

$$(x^2 + x + 4)(x - 1) = 0$$

Первый множитель уравнения является положительным, таким образом, получаем единственный корень, указанный выше.

Ответ: $x = 1$.

4 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

Воспользуемся тем, что один из корней этого уравнения – число 1.

$$x^3+3x-4=(x^2+px+q)(x-1),$$
$$x^3+x^2(p-1)+x(q-p)-q=x^3+3x-4,$$
$$\begin{cases} p-1=0, \\ q-p=3, \\ -q=-4. \end{cases} \begin{cases} p=1, \\ q=4. \end{cases}$$

Получили, что $(x^2+x+4)(x-1)=0$ и, так как первый множитель положителен, то уравнение имеет единственный корень 1.

Ответ: $x=1.$

5 способ. Воспользуемся Теоремой Виета.

$$x^3+0x^2+3x-4=0$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3, \\ x_1x_2x_3=-4. \\ x_1=1. \end{cases} \begin{cases} x_1=1, \\ x_2+x_3=-1, \\ x_2+x_3+x_2x_3=3, \\ x_2x_3=-4. \end{cases} \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-1-x_3, \\ x_3(-1-x_3)=-4. \end{cases} \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-1-x_3, \\ x_3{}^2+x_3+4=0. \end{cases}$$

Последнее уравнение системы не имеет действительных решений, значит, исходное уравнение имеет единственный корень, равный 1.

Ответ: $x=1.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решая целое уравнение третьей степени, выяснили, что каждый из примененных способов обладает как преимуществами, так и недостатками.

Способы решения	Преимущества способа	Недостатки способа	Рацио нальн ость

			способа
Графический способ	Наглядный.	Времяёмкий и графики не всех функций имеют целочисленные координаты, поэтому говорить о точности найденных корней не приходится.	
Свойство монотонных функций	Позволяет быстро находить единственный корень и устанавливать единственность решения.	Не ко всем уравнениям можно применить.	Рациональный
Свойство целого уравнения с целыми корнями	Позволяет быстро находить корни по свободному члену.	Не все уравнения решаются в целых числах.	
Метод неопределенных коэффициентов	Позволяет при наличии хотя бы одного корня определить остальные.	Решая уравнение, приходим к необходимости решать систему уравнений.	Универсальный
Теорема Виета	Устанавливает взаимозависимость между корнями.	Полученная система уравнений решалась дольше, чем ожидалось.	

Таблица 1

К таким же выводам пришли учащиеся 8-ого и 10 классов (физико-математического профиля) (92%) при проведении «Математического боя» смешанных команд 8,10 классов (участвовало 50 респондента, возраст 15-17 лет). 67% отдали свое предпочтение решению с помощью свойства монотонных функций, 30% – целого уравнения с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Существует множество других способов решения целых уравнений. С практикой их решения и определяется рациональный способ их решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учебник для 7 класса / Ион Акири, Андрей Брайков, Ольга Шпунтенко – Chişinău: PrutInternaţional, 2011

2. Решение уравнений 3-й и 4-й степеней открытый урок. – Режим доступа: рф›статьи/559646/(дата обращения 23.10.2017)

3. Исследовательская работа по теме Теорема Виета. - Режим доступа: https://infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-po-teme-teorema-vieta-547689.html(дата обращения 23.10.2017)